En vindmølles effektivitet

Mølleeffektiviten eller virkningsgraden er bestemt som forholdet mellem møllens effekt (watt) i forhold til vindens effekt.

Symbolforklaring. I redegørelsen er anvendt følgende symboler:
Δ Når det græske bogstav "delta" anvendes foran et andet symbol betyder det tilvækst eller ændring.
ρ Det græske bogstav "ro" er symbol for massefylde, vægt pr rumfang, for luft er ρ = 1,2 kg/m^3.
η Det græske bogstav "ny" anvendes ofte som symbol for virkningsgrad eller nyttevirkning.
C_p er også anvendt som symbol for virkningsgraden i denne tekst.
P er symbolet for effekt, som er energiomsætningshastigheden, Joule pr sekund   [J/s = Watt]
E er symbolet på energi, som måles i Joule [J].
A er symbolet på areal, som måles i f.eks. kvadratmeter [m^2].
V er symbolet for volumen, rumfanget, der f.eks. måles i kubikmeter [m^3].
m er symbolet på masse, som måles i f.eks. gram, kilogram, ton [g, kg, ton].
t er symbolet for tid, oftest målt i sekunder [s, sek].
v er symbolet på hastighed, fart, som måles i meter pr sekund [m/s].
p (lille p) er symbolet på impuls, der også kaldes bevægelsesmængde, $p=m*v$ [kgm/s]

En mølles virkningsgrad kan udtrykkes matematisk således:

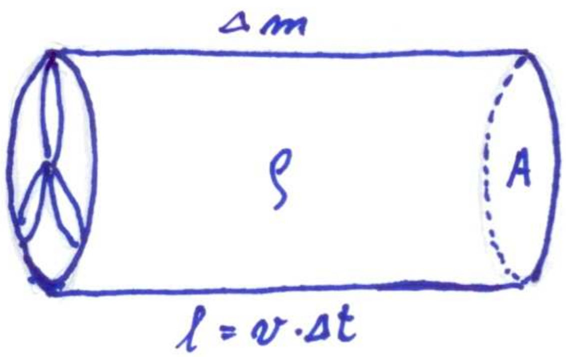
$$\eta = C_p = \frac{P_{mølle}}{P_{vind}}$$

Lad os først se på vindens effekt.
Effekt i watt er som bekendt energien i Joule divideret med tiden i sekunder.
Vi får brug for at bestemme den kinetiske energi for en luftmængde vind Δm divideret med den tid Δt det tager for den at passere et givet overstrøget areal A.
Luftmængden i kg kan findes ved at multiplicere luftens massefylde ρ med rumfanget *V* af den luft, der passerer det overstrøgne areal A indenfor en vis tid Δt. Det afhænger af vindhastigheden *v*.

Den kinetiske energi i vinden kan udtrykkes således

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m * v^2 \qquad \text{[J]}$$

Vi finder et udtryk for det rumfang luft *V*, der passerer det overstrøgne areal A, ved at forestille os en cylinder foran møllen med grundfladen *A* og længden $l = v * \Delta t$.



Rumfanget kan udtrykkes $\Delta V = A * v * \Delta t$ (grundfladen gange sidelængden)

Luftmassen bliver så $\Delta m = \rho * A * v * \Delta t$

Og energien derfor $\Delta E = \frac{1}{2}(\rho * A * v * \Delta t) * v^2 = \frac{1}{2}(\rho * A * \Delta t) * v^3$

Og denne energi divideret med den anvendte tid giver effekten

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho * A * v^3 \qquad \text{[joule/sek = watt]}$$

Effekten, der rammer en given flade A, afhænger altså af massefylden og vindhastigheden i tredie potens.

<u>Lad os nu se på mølleeffekten</u>

Vi prøver at finde forskellen i vindenergien før og efter passage af møllen.
Vindhastigheden vil være en eller anden brøkdel *x* mindre efter møllen end før møllen.

Det kan udtrykkes $v_e = x * v_f$ hvor 0<x<1

Forskel i vindenergien før og efter møllen:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m * v_f^2 - \frac{1}{2}\Delta m * v_e^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m * v_f^2 - \frac{1}{2}\Delta m * (xv_f)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m * v_f^2(1 - x^2) = \frac{1}{2}\Delta m * v_f^2(1 - x)(1 + x)$$

Under energioverførslen til møllen og bremsnings af vinden må effekten være:

(effektlign. A) $$P_{mølle} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f^2(1 - x)(1 + x)$$

da det jo er møllen, der har bremset vinden. Det er møllens bremsende kraft på vindhastigheden, som medfører en impulssænkning i luften. Impulsen (symbol lille p) er defineret som massen gange hastigheden, $p = m * v$. Det kaldes også bevægelsesmængde: Et antal kilogram med en vis fart. [kgm/s]

Impulsforskellen i luften findes således $\Delta p = \Delta m * v_f - \Delta m * x * v_f = \Delta m * v_f(1 - x)$

Den kraft F, som påvirker møllen er impulsforskellen pr. tid: $= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f(1 - x)$

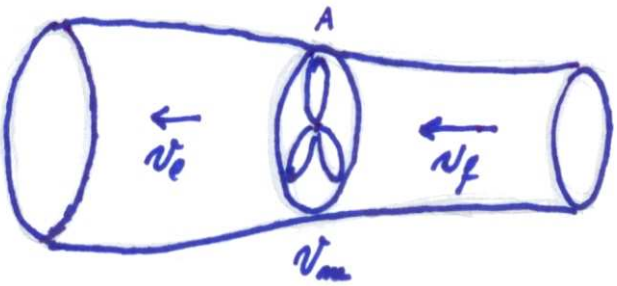
Møllens reaktion i rotationsplanet kan således udtrykkes

(effektlign. B) $$P_{mølle} = F * v_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f(1 - x) * v_m$$

Hvor v_m er vindhastigheden i rotationsplanet, hvor den opbremses.
Ved at sætte de to udtryk A og B for mølleeffekten lig hinanden kan man se, at

$$v_m = \frac{1}{2} * v_f(1+x)$$

Dette kan illustreres med følgende figur:



Desuden er luftmængden, der passerer møllen

$$\Delta m = \rho * v_m * \Delta t * A$$

og

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho * v_m * A$$

Herefter kan mølleeffekten udtrykkes

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \ \rho * v_m * A * v_f^2(1-x)(1+x) \quad \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \ \rho * (\frac{1}{2} * v_f(1+x)) * A * v_f^2(1-x)(1+x) \ \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \ \rho * A * v_f^3 * (\frac{1}{2} * (1+x)^2(1-x)) \ \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = P_{vind} * \frac{1}{2} * (1+x)^2(1-x) \quad \Leftrightarrow$$

Møllens virkningsgrad kan herefter udtrykkes:

$$\eta = C_p = \frac{P_{mølle}}{P_{vind}} = \frac{1}{2} * (1+x)^2(1-x) = \frac{1}{2}(-\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1)$$

For at finde det teoretiske maximum for udnyttelse differentieres udtrykket:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2}(-3x^2 - 2x + 1)$$

Tangentudtrykket sættes lig nul (vandret) og rødderne i andengradsligningen findes:

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = -1 \; eller \; \frac{1}{3}$$

Disse rødder indsættes i udtrykket for virkningsgraden og følgende værdier fås:

$$\eta(-1) = 0 \;\text{ og }\; \eta\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \approx 0{,}59$$

Møllens effekt kan altså højst blive lidt under $\frac{2}{3}$ af vindens effekt:

$$P_{mølle} = 0{,}59 * P_{vind}$$

Dette forhold kaldes Betz´ lov.

Denne udledning er foretaget af

Povl-Otto Nissen til brug for mølleforsøg i

Poul la Cours Forsøgsmølle
Møllevej 21, Askov
6600 Vejen
www.poullacour.dk

Henvendelse for aftale om besøg på Forsøgsmøllen: pon@povlonis.dk eller tlf: 75423933, mobil: 51260117