

## En vindmølles effektivitet

Mølleeffektiviteten eller virkningsgraden er bestemt som forholdet mellem møllens effekt (watt) i forhold til vindens effekt.

Symbolforklaring. I redegørelsen er anvendt følgende symboler:

$\Delta$  Når det græske bogstav "delta" anvendes foran et andet symbol betyder det tilvækst eller ændring.

$\rho$  Det græske bogstav "rho" er symbol for massefylde, vægt pr rumfang, for luft er  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .

$\eta$  Det græske bogstav "ny" anvendes ofte som symbol for virkningsgrad eller nyttevirkning.

$C_p$  er også anvendt som symbol for virkningsgraden i denne tekst.

$P$  er symbolet for effekt, som er energiomsætningshastigheden, Joule pr sekund [J/s = Watt]

$E$  er symbolet på energi, som måles i Joule [J].

$A$  er symbolet på areal, som måles i f.eks. kvadratmeter [ $\text{m}^2$ ].

$V$  er symbolet for volumen, rumfanget, der f.eks. måles i kubikmeter [ $\text{m}^3$ ].

$m$  er symbolet på masse, som måles i f.eks. gram, kilogram, ton [g, kg, ton].

$t$  er symbolet for tid, oftest målt i sekunder [s, sek].

$v$  er symbolet på hastighed, fart, som måles i meter pr sekund [m/s].

$p$  (lille p) er symbolet på impuls, der også kaldes bevægelsesmængde,  $p = m \cdot v$  [kgm/s]

En mølles virkningsgrad kan udtrykkes matematisk således:

$$\eta = C_p = \frac{P_{mølle}}{P_{vind}}$$

Lad os først se på vindens effekt.

Effekt i watt er som bekendt energien i Joule divideret med tiden i sekunder.

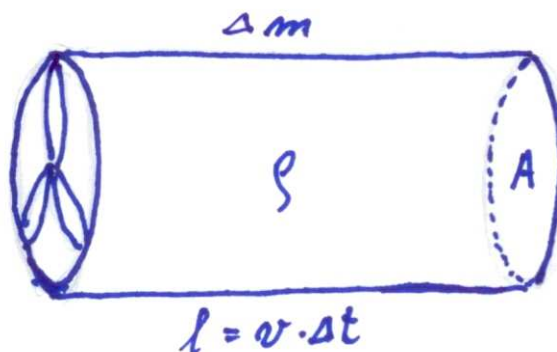
Vi får brug for at bestemme den kinetiske energi for en luftmængde vind  $\Delta m$  divideret med den tid  $\Delta t$  det tager for den at passere et givet overstrøget areal  $A$ .

Luftmængden i kg kan findes ved at multiplicere luftens massefylde  $\rho$  med rumfanget  $V$  af den luft, der passerer det overstrøgne areal  $A$  indenfor en vis tid  $\Delta t$ . Det afhænger af vindhastigheden  $v$ .

Den kinetiske energi i vinden kan udtrykkes således

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 \quad [J]$$

Vi finder et udtryk for det rumfang luft  $V$ , der passerer det overstrøgne areal  $A$ , ved at forestille os en cylinder foran møllen med grundfladen  $A$  og længden  $l = v \cdot \Delta t$ .



Rumfanget kan udtrykkes  $\Delta V = A * v * \Delta t$  (grundfladen gange sidelængden)

Luftmassen bliver så  $\Delta m = \rho * A * v * \Delta t$

Og energien derfor  $\Delta E = \frac{1}{2} (\rho * A * v * \Delta t) * v^2 = \frac{1}{2} (\rho * A * \Delta t) * v^3$

Og denne energi divideret med den anvendte tid giver effekten

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho * A * v^3 \quad [\text{joule/sek} = \text{watt}]$$

Effekten, der rammer en given flade A, afhænger altså af massefylden og vindhastigheden i tredje potens.

### Lad os nu se på mølleeffekten

Vi prøver at finde forskellen i vindenergien før og efter passage af møllen.

Vindhastigheden vil være en eller anden brøkdel  $x$  mindre efter møllen end før møllen.

Det kan udtrykkes  $v_e = x * v_f$  hvor  $0 < x < 1$

Forskel i vindenergien før og efter møllen:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m * v_f^2 - \frac{1}{2} \Delta m * v_e^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m * v_f^2 - \frac{1}{2} \Delta m * (x v_f)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m * v_f^2 (1 - x^2) = \frac{1}{2} \Delta m * v_f^2 (1 - x)(1 + x)$$

Under energioverførslen til møllen og bremsning af vinden må effekten være:

(effektign. A)  $P_{mølle} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f^2 (1 - x)(1 + x)$

da det jo er møllen, der har bremset vinden. Det er møllens bremsende kraft på vindhastigheden, som medfører en impulssænkning i luften. Impulsen (symbol lille  $p$ ) er defineret som massen gange hastigheden,  $p = m * v$ . Det kaldes også bevægelsesmængde: Et antal kilogram med en vis fart. [kgm/s]

Impulsforskellen i luften findes således  $\Delta p = \Delta m * v_f - \Delta m * x * v_f = \Delta m * v_f (1 - x)$

Den kraft  $F$ , som påvirker møllen er impulsforskellen pr. tid:  $= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f (1 - x)$

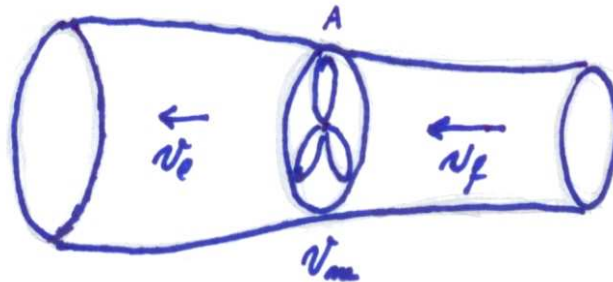
Møllens reaktion i rotationsplanet kan således udtrykkes

(effektign. B)  $P_{mølle} = F * v_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} * v_f (1 - x) * v_m$

Hvor  $v_m$  er vindhastigheden i rotationsplanet, hvor den opbremses.  
 Ved at sætte de to udtryk A og B for mølleeffekten lig hinanden kan man se, at

$$v_m = \frac{1}{2} * v_f(1 + x)$$

Dette kan illustreres med følgende figur:



Desuden er luftmængden, der passerer møllen

$$\Delta m = \rho * v_m * \Delta t * A$$

og

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho * v_m * A$$

Herefter kan mølleeffekten udtrykkes

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \rho * v_m * A * v_f^2(1 - x)(1 + x) \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \rho * \left(\frac{1}{2} * v_f(1 + x)\right) * A * v_f^2(1 - x)(1 + x) \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = \frac{1}{2} * \rho * A * v_f^3 * \left(\frac{1}{2} * (1 + x)^2(1 - x)\right) \Leftrightarrow$$

$$P_{mølle} = P_{vind} * \frac{1}{2} * (1 + x)^2(1 - x) \Leftrightarrow$$

Møllens virkningsgrad kan herefter udtrykkes:

$$\eta = C_p = \frac{P_{mølle}}{P_{vind}} = \frac{1}{2} * (1 + x)^2(1 - x) = \frac{1}{2}(-x^3 - x^2 + x + 1)$$

For at finde det teoretiske maximum for udnyttelse differentieres udtrykket:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2}(-3x^2 - 2x + 1)$$

Tangentudtrykket sættes lig nul (vandret) og rødderne i andengradsligningen findes:

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-6} = -1 \text{ eller } \frac{1}{3}$$

Disse rødder indsættes i udtrykket for virkningsgraden og følgende værdier fås:

$$\eta(-1) = 0 \text{ og } \eta\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \approx 0,59$$

Møllens effekt kan altså højst blive lidt under  $\frac{2}{3}$  af vindens effekt:

$$P_{mølle} = 0,59 * P_{vind}$$

Dette forhold kaldes Betz' lov.



Denne udledning er foretaget af

Povl-Otto Nissen til brug for mølleforsøg i

Poul la Cours Forsøgsmølle

Møllevej 21, Askov

6600 Vejen

[www.poullacour.dk](http://www.poullacour.dk)



Henvendelse for aftale om besøg på Forsøgsmøllen: [pon@povlonis.dk](mailto:pon@povlonis.dk) eller tlf: 75423933, mobil: 51260117